

**PENYELESAIAN NUMERIK PERSAMAAN ADVEKSI DIFUSI 2-D
UNTUK TRANSFER POLUTAN DENGAN MENGGUNAKAN
METODE BEDA HINGGA DUFORT FRANKEL**

***NUMERICAL SOLUTION OF 2-D ADVECTION DIFFUSION
EQUATION FOR POLLUTANT TRANSFER
BY USING DUFORT FRANKEL FINITE DIFFERENCE METHOD***

Alman, Jeffry Kusuma, Amiruddin

*Bagian Matematika Terapan, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin.*

Alamat Korespondensi :

Alman
Program Pascasarjana
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Hasanuddin
Makassar, 90245
Hp : 085 241 840 096
Email : math.unhas@yahoo.com

ABSTRAK :

Persoalan transportasi di perairan dangkal merupakan fenomena yang menarik untuk dikaji dengan menggunakan metode beda hingga. Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan metode yang dipakai, mengetahui penyelesaian numerik persamaan Adveksi Difusi 2 D dan menguji kekonvergenan solusi numerik.. Metode beda hingga merupakan suatu metode numerik yang sering digunakan dalam penyelesaian masalah Persamaan Differensial Parsial karena metode ini dapat memberikan solusi yang cukup akurat. Kemampuan metode beda hingga dalam memberikan hasil pendekatan tersebut karena didukung oleh kemajuan yang pesat dalam bidang komputer. Untuk mempermudah perhitungan numerik, maka dalam tulisan ini digunakan software matlab 2009. Hasil penelitian menunjukkan bahwa penggunaan metode beda hingga ini dapat dikatakan stabil mutlak, solusi numerik yang diperoleh konvergen pada sebuah nilai dan dari simulasi numerik yang diperoleh terlihat pergerakan polutan setiap waktu menggambarkan adanya penurunan konsentrasi polutan yang diakibatkan oleh adanya proses difusi dari polutan yang terangkut oleh aliran air.

Kata Kunci : Adveksi Duffusi , Duffort Frankel, Kestabilan, Kekonvergenan

ABSTRACT :

Transportation problems in shallow water is an interesting phenomenon to be studied by using the finite difference method . This study aims to analyze the stability of the method used , knowing numerical solution of advection diffusion equations 2 D and test the numerical convergence solutions Finite difference method is a numerical method that is often used in problem solving Partial Differential Equations because this method can provide a fairly accurate solution . The ability of finite difference methods in delivering results that approach because it is supported by the rapid advances in the computer field . To simplify the numerical calculations , then in this paper used software matlab 2009 . The results showed that the use of finite difference methods can be said to be absolutely stable , numerical solutions obtained converges on a value of the numerical simulations and obtained visible movement of pollutants at any time reflects a decrease in the concentration of pollutants that result from the diffusion of pollutants are transported by the flow water .

Key Word : Advection-Diffusion, Duffort Frankel, Stability, Convergence

PENDAHULUAN

Fenomena aliran dan transport merupakan suatu gejala alam yang penting untuk dipelajari karena mempunyai pengaruh terhadap beberapa studi rekayasa. Fenomena tersebut terjadi dalam berbagai macam situasi fisik, seperti transfer panas, proses pemisahan zat kimia, aliran fluida dalam media berpori, penyebaran kontaminan dalam cairan dan juga transport partikel-partikel kecil seperti penyebaran polutan, garam, sedimen dan lain-lain di dalam perairan dangkal (Luknanto, 1992). Transportasi aliran air tersebut merupakan bagian dari dinamika fluida yang mengkaji perilaku zat cair dan gas dalam keadaan diam ataupun bergerak dan interaksinya dengan benda padat. Dinamika fluida sering dikatakan sebagai persoalan fisika klasik terbesar yang belum terpecahkan.

Metode beda hingga merupakan salah satu metode yang dapat diterapkan untuk kasus fenomena transport di perairan dangkal dan aliran air tanah yang biasanya dinyatakan dengan persamaan Adveksi Diffusi karena metode ini dapat memberikan hasil pendekatan yang cukup akurat (Ribal, 2008). Kemampuan metode beda hingga dalam memberikan hasil pendekatan tersebut, karena didukung oleh kemajuan yang sangat pesat dalam bidang komputer, baik dalam piranti lunak maupun hardware sehingga menyebabkan metode beda hingga diterapkan secara massif pada level yang lebih tinggi. Dengan kecanggihan piranti lunak dan hardware pada komputer sekarang, masalah rekayasa yang rumit dapat dimodelkan dengan relatif mudah. Waktu yang diperlukan untuk memecahkan masalah pun semakin singkat. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana pergerakan polutan dalam bidang 2 Dimensi, kemudian dilakukan analisis kestabilan, dan analisis kekonvergenan.

BAHAN DAN METODE

Secara keseluruhan penelitian ini dilakukan untuk mengetahui bagaimana pergerakan polutan yang bergerak dalam aliran air yang mengalir dalam daerah domain terbuka. Untuk memperoleh bagaimana pergerakan polutan tersebut, digunakan sebuah metode beda hingga *Duffort Frankel* yang merupakan pengembangan dari metode-metode yang telah ada sebelumnya. Selain itu juga penggunaan *software Matlab 2009* diperlukan untuk memudahkan penyelesaian masalah. Kemudian dari metode yang digunakan dilakukan analisis kestabilan dan kekonvergenan.

Pendefenisian Masalah

Bentuk arah aliran dimisalkan dalam sebuah bidang datar dengan panjang x dan lebar y . Pada bidang datar tersebut mengalir aliran air pada arah sumbu x dengan kecepatan konstan v_x . Aliran tersebut masuk dan kemudian keluar sedangkan domain dari permasalahan yang dibahas adalah $0 \leq x \leq 1$ dan $0 \leq y \leq 1$.

Dalam aliran air yang terkontaminasi polutan, diasumsikan bahwa pada awalnya polutan berada pada sumber dan batas-batas aliran kemudian polutan tersebut terangkut ke dalam bagian dalam aliran. Disamping terbawa aliran air, polutan juga mengalami peristiwa difusi (penyebaran) dalam arah horizontal dengan koefisien difusi (D) tetap.

Persamaan Pembangun

Konsentrasi polutan yang terangkut dalam arah x dengan kecepatan aliran konstan v_x dan sekaligus berdifusi dalam arah horizontal (arah x dan y) dengan koefisien difusi yang juga konstan (D_x dan D_y) digambarkan dalam persamaan berikut :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_x \frac{\partial C}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad (1)$$

Persamaan (1) di atas sering dikenal sebagai persamaan Adveksi-Difusi 2 D dengan

C = Konsentrasi polutan

v_x = Kecepatan aliran dalam arah x

D_x, D_y = Koefisien Diffusi dalam arah x dan y

Metode Beda Hingga

Ide utama yang melatarbelakangi munculnya metode beda hingga dalam memperoleh solusi persamaan differensial parsial adalah sebuah solusi pendekatan yang sering dikenal sebagai pendekatan *Deret Taylor* (Zuhair, 2008). Dalam penggunaan metode beda hingga, domain aliran terelebih dahulu dibagi dalam grid berikut (Chern dkk., 2009) :

$$\begin{aligned} x_i &= i\Delta x, \quad i = 0,1,2,3, \dots \\ y_j &= j\Delta y, \quad j = 0,1,2,3, \dots \\ t_n &= n\Delta t, \quad n = 0,1,2,3, \dots \end{aligned}$$

Pendekatan skema beda hingga yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan Adveksi Diffusi 2 Dimensi seperti yang digambarkan dalam persamaan (1) digunakan metode beda hingga *Duffort Frankel* berikut :

$$\frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + v_x \left(\frac{C_{i+1,j}^n - C_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right) = D_x \left(\frac{C_{i+1,j}^n - C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n-1} + C_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2} \right) + D_y \left(\frac{C_{i,j+1}^n - C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n-1} + C_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} \right) \quad (2)$$

Persamaan (2) di atas dapat dituliskan kembali dalam bentuk lain berikut :

$$C_{i,j}^{n+1} = \frac{(1-2A_x-2A_y)}{(1+2A_x+2A_y)} C_{i,j}^{n-1} + \frac{(2A_x-B)}{(1+2A_x+2A_y)} C_{i+1,j}^n + \frac{(2A_x+B)}{(1+2A_x+2A_y)} C_{i-1,j}^n + \frac{2A_y}{(1+2A_x+2A_y)} (C_{i,j+1}^n + C_{i,j-1}^n) \quad (3)$$

Dengan $A_x = \frac{D_x \Delta t}{(\Delta x)^2}$, $A_y = \frac{D_y \Delta t}{(\Delta y)^2}$ dan $B = \frac{v_x \Delta t}{\Delta x}$.

Metode beda hingga Duffort frankel yang digunakan dalam menyelesaikan persamaan Adveksi Diffusi 2-D di atas dapat dikatakan konsisten terhadap persamaan differensial parsialnya dan juga dikatakan stabil mutlak (*Unconditional Stability*) yang berarti bahwa memiliki solusi berhingga untuk setiap $\Delta x, \Delta y$ dan Δt yang digunakan (Gilberto, 2004).

Persoalan Kestabilan

Dalam menyelesaikan persamaan beda hingga perlu memperhatikan batas-batas nilai dari parameter yang dilibatkan dalam masalah, oleh karena itu harus dilakukan analisis kestabilan persamaan beda hingga tersebut. Metode yang akan digunakan untuk menganalisis kestabilan persamaan beda dalam masalah ini adalah metode *Von Neumann*. Dalam metode ini digunakan komponen fourier $C_i^n = \rho^n e^{IP(\Delta x)i}$ dengan $I = \sqrt{-1}$, ρ^n merupakan amplitud pada waktu n dan P merupakan gelombang (wave number) pada arah x . Komponen fourier tersebut kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan beda hingga yang akan digunakan dan selanjutnya akan ditentukan kondisi $|\rho| \leq 1$. Pada kondisi tersebut metode yang digunakan dikatakan stabil (Miersemann, 2012).

HASIL

Analisis kestabilan persamaan beda hingga Dufort Frankel dalam tulisan ini digunakan komponen fourier $C_{i,j}^n = \rho^n e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y j)}$, $C_{i,j}^{n\pm 1} = \rho^{n\pm 1} e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y j)}$, $C_{i\pm 1,j}^n = \rho^n e^{I(P\Delta x (i\pm 1) + Q\Delta y j)}$ dan $C_{i,j\pm 1}^n = \rho^n e^{I(P\Delta x i + Q\Delta y (j\pm 1))}$. Dengan mendefinisikan sudut fase $\theta = P\Delta x$ dan $\omega = Q\Delta y$ dan kemudian mensubstitusikan komponen-komponen fourier di atas ke dalam persamaan (3), maka akan diperoleh

$$(1 + 2A_x + 2A_y) \rho^{n+1} e^{I(\theta i + \omega j)} = (1 - 2A_x - 2A_y) \rho^{n-1} e^{I(\theta i + \omega j)} + (2A_x - B) \rho^n e^{I(\theta(i+1) + \omega j)} + (2A_x + B) \rho^n e^{I(\theta(i-1) + \omega j)} + 2A_y \rho^n e^{I(\theta i + \omega(j+1))} + 2A_y \rho^n e^{I(\theta i + \omega(j-1))} \quad (4)$$

Jika bagian $\rho^n e^{I(\theta i + \omega j)}$ persamaan (4) dieliminasi maka persamaan tersebut dapat dituliskan sebagai

$$(1 + 2A_x + 2A_y)\rho = (1 - 2A_x - 2A_y)\rho^{-1} + 2A_x(e^{I\theta} + e^{-I\theta}) - B(e^{I\theta} - e^{-I\theta}) + 2A_y(e^{I\omega} + e^{-I\omega}) \quad (5)$$

Atau

$$(1 + 2A_x + 2A_y)\rho = (1 - 2A_x - 2A_y)\rho^{-1} + 4A_x\left(\frac{e^{I\theta} + e^{-I\theta}}{2}\right) - 2IB\left(\frac{e^{I\theta} - e^{-I\theta}}{2I}\right) + 4A_y\left(\frac{e^{I\omega} + e^{-I\omega}}{2}\right) \quad (6)$$

Dengan menggunakan identitas $\cos \theta = \frac{e^{I\theta} + e^{-I\theta}}{2}$ dan $\sin \theta = \frac{e^{I\theta} - e^{-I\theta}}{2I}$, maka persamaan (6) menjadi

$$(1 + 2A_x + 2A_y)\rho = (1 - 2A_x - 2A_y)\rho^{-1} + 4A_x \cos \theta - 2IB \sin \theta + 4A_y \cos \omega \quad (7)$$

Atau

$$(1 + 2A_x + 2A_y)\rho^2 - (4A_x \cos \theta - 2IB \sin \theta + 4A_y \cos \omega)\rho - (1 - 2A_x - 2A_y) = 0 \quad (8)$$

Persamaan (8) di atas merupakan sebuah persamaan kuadrat dengan $a = (1 + 2A_x + 2A_y)$, $b = -(4A_x \cos \theta - 2IB \sin \theta + 4A_y \cos \omega)$ dan $c = -(1 - 2A_x - 2A_y)$. Akar-akar dari persamaan kuadrat tersebut adalah

$$\begin{aligned} \rho_{1,2} = & \frac{1}{2(1+2A_x+2A_y)} \left((4A_x \cos \theta - 2IB \sin \theta + 4A_y \cos \omega) \pm \right. \\ & \left. \sqrt{(4A_x \cos \theta - 2IB \sin \theta + 4A_y \cos \omega)^2 + 4(1 + 2A_x + 2A_y)(1 - 2A_x - 2A_y)} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

Seperti yang telah diketahui sebelumnya bahwa persamaan beda dikatakan stabil jika memenuhi syarat $|\rho| \leq 1$. Nilai maksimum pada bagian $4A_x \cos \theta - 2IB \sin \theta$ persamaan (9) adalah $\sqrt{16A_x^2 - 4B^2}$ dan nilai maksimum dari $4A_y \cos \omega$ adalah $4A_y$, sehingga nilai ρ dapat dituliskan sebagai

$$\rho_{1,2} = \frac{1}{(1+2A_x+2A_y)} \left\{ (\sqrt{4A_x^2 - B^2} + 2A_y) \pm \sqrt{1 - B^2 - 8A_x A_y - 2A_y \sqrt{16A_x^2 - 4B^2}} \right\} \quad (10)$$

Harga modulus dari ρ adalah

$$|\rho|^2 = \frac{1}{(1+2A_x+2A_y)^2} (1 + 4A_x^2 + 4A_y - 8A_xA_y - 2B^2) \quad (11)$$

Dengan manipulasi aljabar pada persamaan (11), maka persamaan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk

$$|\rho|^2 = \frac{(1+2A_x+2A_y)^2 - 4A_x - 4A_y^2 - 16A_xA_y - 2B^2}{(1+2A_x+2A_y)^2} \quad (12)$$

Persamaan (12) di atas mengisyaratkan bahwa nilai ρ memiliki nilai selalu kurang dari 1 ($\rho \leq 1$). Oleh karena itu, hal ini menunjukkan bahwa metode beda hingga yang digunakan dalam tulisan ini (Metode Beda Hingga Dufort Frankel) dikatakan *Stabil Mutlak (Uncondition Stability)*.

Model Numerik

Dalam penelitian numerik ini, akan ditampilkan tiga contoh kasus. Kasus pertama : diasumsikan bahwa sebuah polutan pada awalnya berada pada sepanjang sumber aliran. Kasus kedua : disamping pada sumber aliran, polutan juga awalnya berada disepanjang sisi aliran. Dan kasus ketiga : diasumsikan bahwa aliran hanya berada pada sebuah titik pada bagian tengah aliran.

Untuk kasus pertama diketahui persamaan Adveksi Diffusi dua dimensi digambarkan dalam persamaan berikut :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_x \frac{\partial C}{\partial x} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

Persamaan ini diselesaikan dengan syarat awal (*initial conditions*) :

$$C(x, y, 0) = 0, \quad 0 \leq x, y \leq 1 \quad (13)$$

Dan syarat batas (*boundary condition*) :

$$\begin{aligned} C(0, y, t) &= 1, \quad 0 \leq y \leq 1, t > 0 \\ C(1, y, t) &= 0, \quad 0 \leq y \leq 1, t > 0 \\ C(x, 0, t) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, t > 0 \\ C(x, 1, t) &= 0, \quad 0 \leq x \leq 1, t > 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Nilai-nilai batas seperti pada persamaan (14) di atas digunakan untuk menghitung konsentrasi di daerah batas domain. Sedangkan untuk menghitung nilai

dalam daerah domain digunakan persamaan beda hingga (3). Dengan menentukan nilai-nilai parameter Koefisien Diffusi $D_x = 0,0004 \text{ m}^2/\text{s}$, $D_y = 0,0001 \text{ m}^2/\text{s}$ Kecepatan aliran (v_x) = $0,0125 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, lama aliran (T) = 10 s kemudian daerah domain dibagi ke dalam grid-grid dengan ukuran $\Delta x = \Delta y = 0,1$. Sedangkan grid waktu (T) dibagi dengan ukuran $\Delta t = 0,01$. Hasil simulasi kasus pertama ini dapat dilihat pada gambar 1 (terlampir). Dari kedua gambar tersebut dapat dijelaskan bahwa pada awalnya sebuah aliran (daerah domain) tidak terkontaminasi polutan, kemudian pada sepanjang daerah sumber aliran diberikan polutan dengan konsentrasi polutan dengan nilai 1. Setelah 5 detik kemudian polutan mulai tersebar kedalam daerah aliran dengan nilai konsentrasi polutan maksimum 0,9 dan setelah 10 detik polutan mulai menipis dengan nilai konsentrasi polutan maksimum 0,6. Penipisan konsentrasi polutan ini diakibatkan oleh adanya peruses diffusi.

Sama halnya dengan kasus pertama, pada kasus kedua juga menggunakan nilai parameter-parameter yang sama, begitu juga pada syarat awal (*initial condition*). Akan tetapi pada syarat batas pada kasus ini berbeda dengan pada kasus I. Pada kasus II ini konsentrasi polutan bukan hanya berada pada sepanjang sumber aliran tetapi juga pada kedua sisi aliran, yaitu :

$$\begin{aligned}
 \text{Syarat awal} & : C(x, y, 0) = 0, \quad 0 \leq x, y \leq 1 \\
 \text{Syarat Batas} & : C(0, y, t) = 1, \quad 0 \leq y \leq 1, t > 0 \\
 & C(1, y, t) = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, t > 0 \\
 & C(x, 0, t) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, t > 0 \\
 & C(x, 1, t) = 1, \quad 0 \leq x \leq 1, t > 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

Hasil visualisasi untuk kasus ini ditampilkan pada gambar 2 (terlampir). Dari gambar tersebut terlihat bahwa konsentrasi polutan berawal pada daerah sepanjang sumber aliran dan kedua sisi aliran. Seiring berjalannya waktu, saat 5 detik kemudian polutan menyebar kedalam aliran dan pada 10 detik kemudian konsentrasi polutan tersebut mulai mengalami penurunan hingga 0,7.

Persoalan pada kasus ketiga hampir sama dengan kasus pertama. Perbedaannya terletak pada masalah nilai batas dengan menempatkan awal polutan pada daerah titik tengah sumber polutan. Jika simulasi untuk kasus ini ditampilkan dalam waktu sesaat maka diperoleh hasil seperti pada gambar 3 (terlampir). Dari gambar tersebut dapat

dijelaskan bahwa sumber polutan dengan konsentrasi 1 berawal dari titik tengah sumber aliran, setelah 5 detik kemudian titik polutan mulai bergerak masuk ke dalam daerah aliran dengan diikuti penurunan konsentrasi menjadi 0,9. Kemudian pada 10 detik kemudian polutan semakin masuk ke bagian dalam aliran dan juga diikuti penurunan konsentrasi polutan hingga mencapai konsentrasi maksimum 0,6. Hal ini disebabkan karena disamping mengalami proses angkutan (adveksi), polutan juga mengalami sebuah proses yang dinamakan sebuah proses difusi (penyebaran).

Uji Konvergensi Metode Beda Hingga

Pengujian kekonvergenan metode beda hingga Duffort Frankel yang dipakai untuk menyelesaikan persamaan Adveksi Diffusi 2 Dimensi dilakukan dengan mengamati salah satu titik dalam daerah domain pada waktu tertentu. Titik yang diamati dalam pembahasan ini yaitu bagian pertama merupakan bagian tengah domain dan waktu yang dipilih yaitu pada waktu akhir atau $T = 10 \left(C \left(\frac{L}{2}, \frac{P}{2}, T_{Akhir} \right) \right)$. Sedangkan bagian kedua pada tengah sumber aliran dan saat waktu akhir atau saat $T=10 \left(C \left(\frac{L}{2}, \frac{P}{10}, T_{Akhir} \right) \right)$. Selanjutnya ukuran grid dibuat menjadi $1/2$ kali sebelumnya. Kemudian akan diidentifikasi selisih antara nilai yang diperoleh. Disamping pada selisih, pengamatan juga dilakukan pada Galat yaitu persentase perubahan/selisih yang dicapai. Galat ini dihitung dengan perhitungan matematika sederhana berikut :

$$Galat = \left| \left(\frac{C_n(x,y,T_{Akhir}) - C_{n-1}(x,y,T_{Akhir})}{C_{n-1}(x,y,T_{Akhir})} \right) \right| \times 100\% \quad (16)$$

Hasil dari pengamatan ini dapat dilihat pada tabel 1 dan tabel 2 (terlampir). Tabel-tabel tersebut ditampilkan konvergensi metode beda hingga Dufort Frankel yang dilakukan pada suatu titik dan contoh kasus yang dipilih adalah *kasus II*. Dari Kedua tabel tersebut telah diperoleh hasil yang menggambarkan nilai-nilai dari dua titik uji. Pada kedua titik uji tersebut dihasilkan nilai yang berubah-ubah saat besar/ukuran grid $\Delta x, \Delta y$ dan Δt dibuat semakin mengecil yaitu $1/2$ kali sebelumnya. Dari perubahan ukuran grid diperoleh solusi/nilai pada titik-titik uji semakin mendekati 0. Hal ini terlihat pada masing-masing selisih dan galat yang dihasilkan. Pada galat menunjukan perubahan persentase yang semakin meningkat hingga mendekati perubahan 100%. Dengan hasil yang diperoleh ini, maka dapat dikatakan bahwa penggunaan metode beda hingga *Dufort Frankel* untuk penyelesaian persamaan adveksi diffusi 2 Dimensi adalah *Konvergen*.

PEMBAHASAN

Penelitian ini menunjukkan bahwa penggunaan metode beda hingga Dufort Frankel dalam menyelesaikan persamaan Adveksi-Diffusi 2 dimensi dapat dikatakan stabil mutlak dan hasil numerik yang diperoleh menunjukkan konvergen pada sebuah nilai. Pada simulasi gambar yang dilakukan menunjukkan bahwa polutan dalam aliran air disamping terangkut oleh aliran juga mengalami suatu proses penipisan konsentrasi atau yang disebut sebagai peristiwa difusi.

Sama halnya dengan simulasi numerik yang dijelaskan oleh (Cahyono dkk. 2011), suatu konsentrasi polutan akan mengalami proses difusi disamping mengalami proses angkutan. Sebelum melakukan simulasi numerik, perlu dilakukan adanya analisis kekonsistenan dan kestabilan (Erich dkk.2012). Suatu persamaan beda hingga dikatakan konsisten jika persamaan beda hingga tersebut dapat diubah kembali ke dalam persamaan differensial parsial pada saat grid-gridnya dibuat semakin menuju 0, sedangkan dikatakan stabil jika skema beda hingga tersebut menghasilkan solusi yang terbatas/berhingga (Dormand J.R, 2006). Persoalan kestabilan dalam menyelesaikan solusi numerik sangat perlu dilakukan karena hal ini berhubungan dengan nilai-nilai parameter yang layak digunakan sehingga solusi numerik yang diperoleh merupakan solusi yang konvergen.

Konvergensi sebuah persamaan beda dilakukan dengan mengidentifikasi selisih solusi numerik dan solusi analitik sebagai bagian dari error/kesalahan (Causon D.M, 2010). Namun, jika suatu persamaan differensial tidak ditemukan solusi analitiknya maka alternatif lain yang perlu dipakai untuk menguji konvergensi dari persamaan beda yaitu mengamati perubahan yang terjadi pada suatu titik tertentu dalam daerah domain pada saat besar grid (Δx , Δy dan Δt) dibuat makin kecil (Hoffman, dkk., 2000).

KESIMPULAN DAN SARAN

Dari pembahasan yang telah dijelaskan sebelumnya dapat dijelaskan bahwa metode beda hingga yang digunakan (Metode Beda Hingga Dufort Frankel) dapat dipakai untuk menyelesaikan persoalan angkutan polutan dalam aliran air yang mengalir dalam aliran terbuka. Persamaan tersebut digambarkan dalam sebuah persamaan differensial parsial yang disebut sebagai persamaan Adveksi Diffusi 2 D.

Pada simulasi yang dilakukan dengan bantuan *software Matlab*, sebuah polutan yang jatuh pada sebuah aliran yang mengalir disamping mengalami proses angkutan (*Adveksi*) juga mengalami sebuah proses yang dinamakan peristiwa penyebaran (*Difusi*). Disamping itu juga, penggunaan metode beda hingga Dufort Frankel dalam menyelesaikan persamaan Adveksi-Difusi 2 D dapat dikatakan konsisten, stabil (*unconditional stability*) dan konvergen untuk ukuran grid yang lebih kecil. Dalam penyelesaian persoalan transport polutan (Adveksi Difusi) 2 Dimensi, dalam tulisan ini digunakan metode beda hingga *Dufort Frankel*. Penulisan selanjutnya disarankan dalam menyelesaikan persamaan transport tersebut dengan menggunakan metode beda hingga yang lain sehingga akan diperoleh perbandingan hasil antara metode. Selain itu juga, Karena dalam penulisan ini kecepatan dan koefisien diffusi adalah bersifat tetap/konstan maka pada penulisan selanjutnya diharapkan perlu adanya penggunaan variabel kecepatan (v_x) dan koefisien Diffusi (D_x dan D_y) yang bergantung waktu (T) dan posisi.

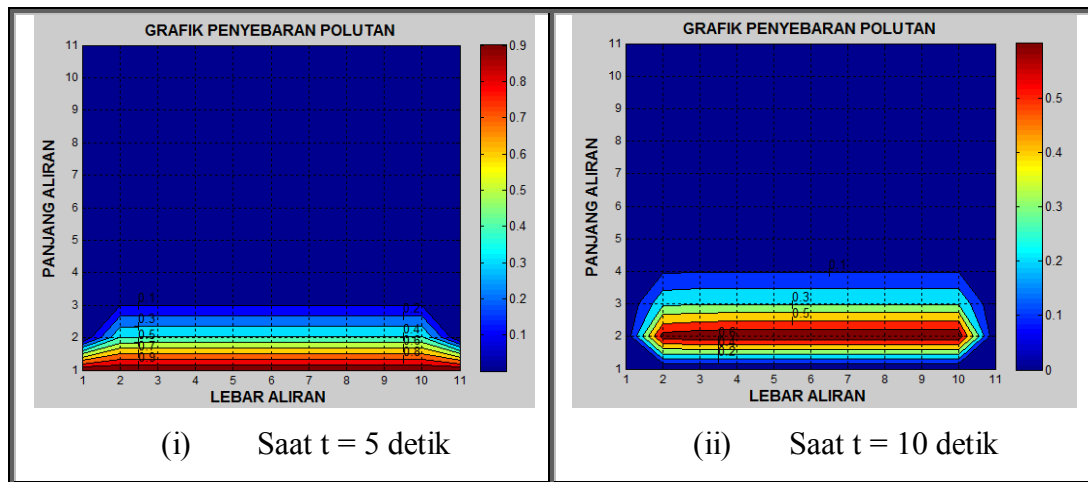
DAFTAR PUSTAKA

- Causon D.M. (2010). Introductory Finite Difference Methods for PDEs. Diakses 29 Juni . Available from : <http://www.leka.lt/sites/default/files/dokumentai/introductory-finite-difference-methods-for-pdes.pdf>
- Chern, I Ling. (2009). Finite Difference Method for Solving Differential Equation. Diakses 19 Maret 2013. Available from : <http://scicomp.math.ntu.edu.tw/wiki/images/6/62/FD.pdf>
- Cahyono,E. L.Gubu . L. Hamimu. (2011). Metode Beda Hingga untuk Analisis Transfer Massa, Journal Vol.15, No.2. Universitas Haluoleo, Kendari.
- Dormand, J. R. (2006). Numerical Methods for Differential Equations, A Computational Approach. CRC Press, NY.
- Gilberto E.Urroz, (2004). Convergence, Stability, and Consistency of Finite Difference Schemes in the Solution of Partial Differential Equations. Diakses 15 Maret 2013. Available from : http://ocw.usu.edu/civil_and_environmental_engineering/numerical_methods_in_civil_engineering/StabilityNumericalSchemes.pdf
- Hoffman and Chiang. (2000). Computational Fluid Dynamics For Engineers, Volume 1. Wichita Kansas, USA.
- Luknanto, Djoko.(1992). Angkutan Limbah. Universitas Gadjah Mada, Pusat Antar Universitas, Ilmu Teknik, Yogyakarta.
- Miersemann, Erich. (2012). Partial Differential Equations - Lecture Notes. diakses 26 Maret 2013. Available from : (<http://www.math.uni-leipzig.de/~miersemann/pdebook.pdf>).

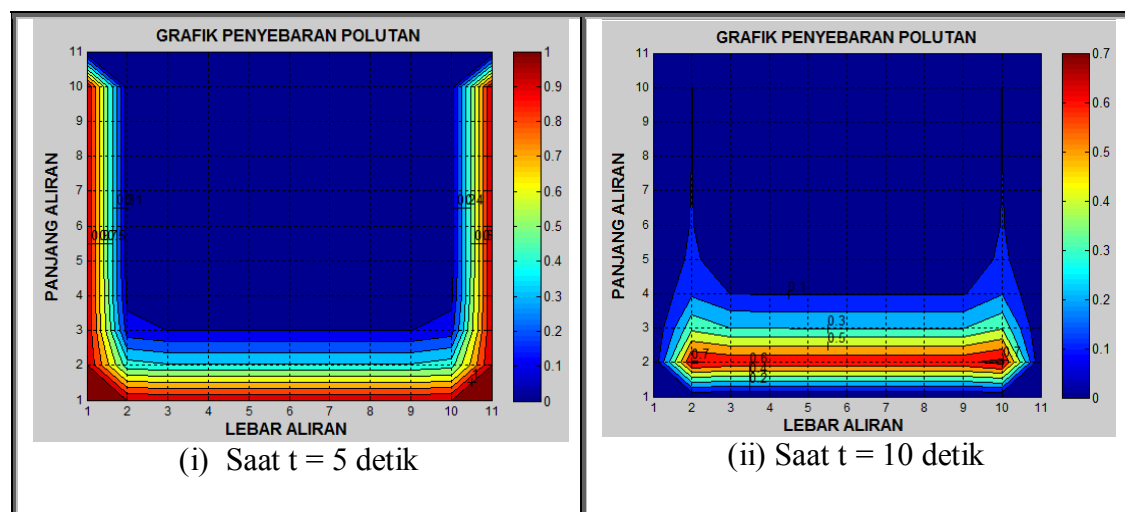
- Ribal. (2008). Metode Beda Hingga, Draft Lecture Note on Finite Difference Methods. Jurusan Matematika FMIPA Unhas, Makassar.
- Zuhair. (2008). Metode Numerik – Deret Taylor dan Deret MacLaurin. Universitas Mercubuana, Jakarta.

LAMPIRAN

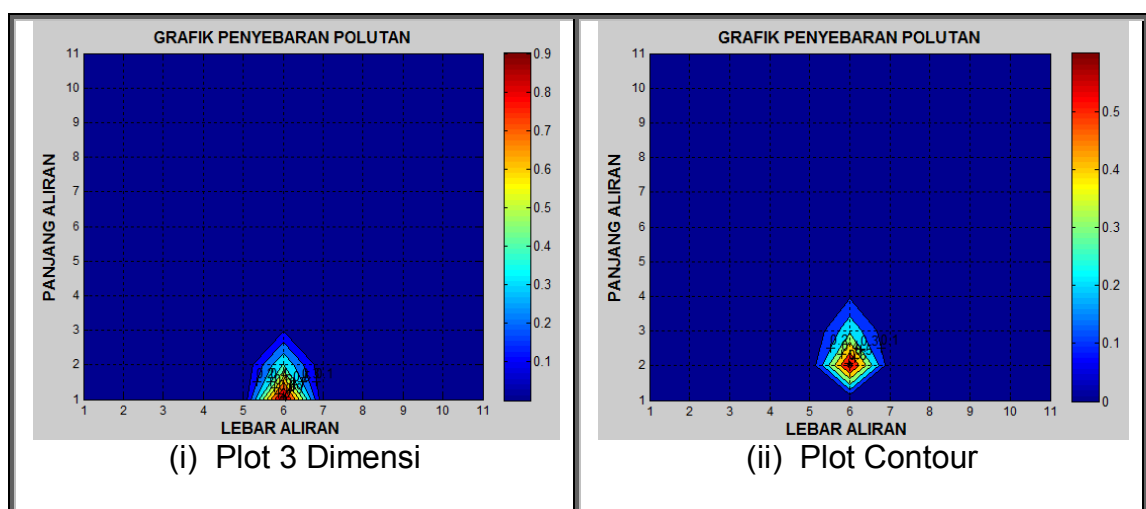
Lampiran Gambar



Gambar 1. Pergerakan Polutan Pada Kasus I



Gambar 2. Pergerakan Polutan Pada Kasus II



Gambar 3. Pergerakan Polutan Pada Kasus II

Lampiran tabel

**Tabel 1. Konvergensi Metode Beda Hingga Dufort Frankel
Pada Daerah Tengah Domain dan T = 10**

n	Ukuran Grid			$C_n \left(\frac{L}{2}, \frac{P}{2}, T_{Akhir} \right)$	Selisih $ C_n - C_{n-1} $	Galat (%)
	Δx	Δy	Δt			
1	0.1	0.1	0.1	0.0045	–	–
2	0.05	0,05	0,05	3.9764×10^{-4}	4.1023×10^{-3}	91.1636
3	0,025	0,025	0,025	6.2650×10^{-6}	3.9137×10^{-4}	98.4245
4	0,0125	0,0125	0,0125	1.0218×10^{-11}	6.2649×10^{-6}	99.9998

**Tabel 2. Konvergensi Metode Beda Hingga Dufort Frankel
Pada Bagian Tengah Sumber Aliran dan T = 10**

n	Ukuran Grid			$C_n \left(\frac{L}{2}, \frac{P}{10}, T_{Akhir} \right)$	Selisih $ C_n - C_{n-1} $	Galat (%)
	Δx	Δy	Δt			
1	0,1	0,1	0,1	0.6762	–	–
2	0,05	0,05	0,05	0.5488	0.1274	18.841
3	0,025	0,025	0,025	0.1459	0.4029	73.415
4	0,0125	0,0125	0,0125	0.0063	0,1396	95.682